ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
σε μια σελίδα Α4 ανά έτος … … προσαρμοσμένα στις επιταγές του ΔΝΤ
(IMF: …4ο μεσοπρόθεσμο ….) (WWF: ….εξοικονόμηση πόρων….)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
Ημερήσιων Λυκείων
2000 - 2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 03 – 06 – 2000......1
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 00 – 09 – 2000......2
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 14 – 06 – 2001......3
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 30 – 06 – 2001......4
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 28 – 05 – 2002......5
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 04 – 07 – 2002......6
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 27 – 05 – 2003......7
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 03 – 07 – 2003......8
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 25 – 05 – 2004......9
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 07 – 07 – 2004......10
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 28 – 05 – 2005......11
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 08 – 07 – 2005......12
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 25 – 05 – 2006......13
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 03 – 07 – 2006......14
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 22 – 05 – 2007......15
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 29 – 06 – 2007......16
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 22 – 05 – 2008......17
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 01 – 07 – 2008......18
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 18 – 05 – 2009......19
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 07 – 07 – 2009......20
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 17 – 05 – 2010......21
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 05 – 07 – 2010......22
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 14 – 05 – 2011......23
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 04 – 06 – 2011......24
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 23 – 05 – 2012......25
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 12 – 06 – 2012......26
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 20 – 05 – 2013......27
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 10 – 06 – 2013......28

Επιμέλεια: Γ. Πορταλάκης

ΘΕΜΑ 1

Α. α) Δίνεται η συνάρτηση F(x) = f(x) + g(x). Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:
F΄(x) = f΄(x) + g΄(x). Μ: 8

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων: cf(x), f(x)g(x), $\frac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x)\neq 0$ όπου c πραγματική σταθερά. Μ: 4,5

Β. i) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Μ: : 8

Στήλη Α Συνάρτηση	Στήλη Β πρώτη παράγωγος
α. x^2+3	1. 1- ημx
β. x+συνx	2. 3 x^2 -8x
γ. x ημx	3. 2x+3
δ. x^3-4x^2	4. ημx - x συνx
	5. 2x
	6. 3 x^2 − 4x
	7. ημx+xσυνx

ii) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $x\neq 0$ είναι: Α: e^x $B:\frac{e^x-xe^x}{x^2}$ $\Gamma:\frac{e^x x+e^x}{x^2}$ $\Delta:\frac{e^x x-e^x}{x^2}$ $E:\frac{xe^x-e^x}{x}$ Μ: 4,5

ΘΕΜΑ 2

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής Χ σωστά συμπληρωμένο. Μ: 16

Τιμές Μεταβλητής x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα f_i%	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i\nu_i$	x_i^2	$x_i^2\nu_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	ν = 50	1	100				

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Μ: 4

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι s^2 = 0,49. Μ: 5

ΘΕΜΑ 3

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

Α. να συμμετέχει σ’ έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς; Μ: 8

Β. να συμμετέχει μόνο σ’ έναν από τους δύο διαγωνισμούς; Μ: 8

Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς; Μ: 9

ΘΕΜΑ 4

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [ )	0 - 5	5 - 10	10 -15	15-20	20-25	25-30	30-35
Σχετική Συχνότητα	10	15	12	15	18	18	12

Α. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας; Μ: 5

Β. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Μ:10

β) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Μ:10

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Μ:6,5

Α2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις: P(Α - Β) = ... $P(A \cup B)$ = ...όταν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, και P(Α΄) = ..., όπου Α΄ είναι το συμπληρωματικό του Α. Μ:6

Β. Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω = { $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ } ενός πειράματος τύχης με

$P(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24}$ και $P(\omega_5) = 3P(\omega_1)$.

α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι: Α : $\frac{1}{2}$ Β : $\frac{1}{6}$ Γ : $\frac{1}{3}$ Δ : $\frac{1}{12}$ Ε : $\frac{1}{8}$ Μ:6,5

β. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α = { $\omega_1, \omega_3, \omega_5$ } και Β = { ω_1, ω_2 } του δειγματικού χώρου Ω.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Μ:6

Στήλη Α	Στήλη Β	
α. $P(A \cup B)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{24}$
β. $P(A \cap B)$		
γ. P(Α-Β)	$\frac{23}{24}$	$\frac{1}{6}$
δ. P(Α΄)		

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 400 εργαζομένων μιας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες. Α΄ Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου Β΄ Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου
Γ΄ Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανωτάτης Εκπαίδευσης Δ΄ Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου
Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνον από τις κατηγορίες αυτές.

Στην Α΄ κατηγορία ανήκει το 25% των εργαζομένων της επιχείρησης. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ΄ κατηγορίας είναι 18°. Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης της Β΄ κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζομένων της Γ΄ κατηγορίας.

α. Να υπολογίσετε τους εργαζόμενους κάθε κατηγορίας. Μ:20

β. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων. Μ:5

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$, με x ∈ R. α. Να βρείτε την $f'(x)$. Μ:5

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι 0. Μ:10

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f. Μ:10

ΘΕΜΑ 4

Η θερμοκρασία δύο πόλεων Α και Β το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου ήταν (σε βαθμούς Κελσίου):

Πόλη Α:20	18	20	17	18	17	16	17	16	10
Πόλη Β:18	16	17	15	16	12	16	17	20	22

α. Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των πόλεων Α και Β. Μ:9

β. Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών των πόλεων Α και Β είναι s_A = 2,66 και s_B = 2,59, τότε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Μ:8

γ. Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμότερο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε συστηματικά λόγω βλάβης αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Μ:8

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δ. χ. Ω ισχύει ότι: $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$. Μ: 8,5

Α.2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, (=, ≤, ≥) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α. $P(A') \ldots 1-P(A)$ Μ: 2 β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \ldots P(A)$. Μ: 2

Β.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με την ένδειξη «Σ» ή «Λ» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και Α΄ το αντίθετο του ενδεχομένου Α.

α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$. β. Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$. Μ: 4

Β.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $A \subseteq B$, $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{5}{12}$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με: α. $\frac{1}{4}$ β. $\frac{5}{12}$ γ. $\frac{2}{3}$ δ. $\frac{1}{6}$. Μ: 2,5

Β.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Μ: 6

Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δ. χώρου Ω και ισχύει ότι : $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ & $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A-B)$ β. $P\left((B-A)'\right)$ γ. $P\left((A \cap B)'\right)$	1. $\frac{1}{20}$ 2. $\frac{2}{15}$ 3. $\frac{4}{5}$ 4. $\frac{1}{12}$ 5. $\frac{19}{20}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = συνx + ημx.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$. Μ: 8

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0,1). Μ: 8

Γ. Να βρείτε την τιμή λ∈R για την οποία ισχύει η σχέση: $\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ Μ: 9

ΘΕΜΑ 3

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [–)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

Α. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην $3^η$ και $4^η$ κλάση.Μ: 8

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων. Μ: 9

Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος

α. μικρότερο από 65 κιλά. Μ: 4 β. μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών. Μ:4

ΘΕΜΑ 4

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

Α. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής του. Μ: 6

Β. Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μ: 6

Γ. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά. Μ: 6

Δ. Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV). Μ: 7

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε να αποδείξετε ότι: $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός. Μ: 6,5

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$	δ. $\left(x^{\rho}\right)' = \rho x^{\rho-1}$, ρ ρητός, x>0
β. $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$	ε. $\left(\eta\mu x\right)' = $ συνx
γ. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$, $(g(x) \neq 0)$	στ. $\left(\sigma\upsilon\nu x\right)' = $ ημx Μ: 6

Β.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Μ: 7,5

Στήλη Α Συνάρτηση f	Στήλη Β Πρώτη παράγωγος της f
α. $2\sqrt{x} + \ln 2$, $x > 0$ β. $\dfrac{\eta\mu x}{x}$, $x \neq 0$ γ. ημ3x	1. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2}$ 2. 3συν3x 3. $\dfrac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ 4. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 5. $\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$ 6. –3συν3x

Β.2. Αν f(x)=$\frac{1}{4}(x-1)^4$ και $f'(\alpha) = 27$, όπου α πραγματικός αριθμός, τότε να βρείτε την τιμή του α. Μ: 5

ΘΕΜΑ 2

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου. Α. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι 24,4 ^oC, τότε:

α. να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 ^oC και πόσες 25 ^oC Μ:10

β. να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο. Μ: 5

Β. Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι 24,5 ^oC, να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 ^oC και πόσες 25 ^oC. Μ: 10

Τιμές Θερμοκρασίας x_i	Πλήθος Ημερών ν_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

ΘΕΜΑ 3

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

α. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων. Μ: 10

β. Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Μ: 7

γ. Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων, για τα δεδομένα του προβλήματος. Μ: 8

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω Α το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα. Μ: 5

β. Να αποδείξετε ότι: Ρ(Γ-Α) ≤ $3/5$ Μ: 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα. Μ: 8

δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές. Μ: 7

ΘΕΜΑ 1

Α. Ας υποθέσουμε ότι x_1 , x_2, ..., x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου k, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με k ≤ ν.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα v_i, που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , i = 1,2,…,k; Μ: 3

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_1 της τιμής x_i, i = 1,2,…,k; Μ: 3

γ. Να αποδείξετε ότι: i) $0 \le f_1 \le 1$ για i = 1, 2, …, k ii) $f_1 + f_2 + ... + f_k = 1$. Μ: 4

Β.1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Μ: 8

Β.2.α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δ. Χ. Ω. Μ: 5

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων: i) P(Ω) ii) P (∅). Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Μ: 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. Μ: 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f. Μ: 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία y = 2x + 5. Μ: 10

ΘΕΜΑ 3

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:
8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή. Μ: 6

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής. Μ: 6

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής. Μ: 13

ΘΕΜΑ 4

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.
Δίνεται ακόμα η συνάρτηση: $f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3$, x ∈ R.

α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$. Μ: 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \dfrac{P(A) + P(B)}{2}$. Μ: 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι f(P(A)) = f(P(B)). Μ: 7

ΘΕΜΑ 1

Α1.Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής; Μ: 4

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα; Μ: 4

Α3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x) = x είναι $f'(x) = 1$. Μ: 10

Β1. Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι $x_1, x_2, ..., x_k$ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k$ αντίστοιχα και ν είναι το πλήθος των παρατηρήσεων. Πώς ορίζεται η μέση τιμή $\bar{x}$; Μ: 4

Β2.Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείμενο που ακολουθεί συμπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά.
Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, ..., w_\nu$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον .... μέσο ή .... μέσο που βρίσκεται από τον τύπο $\bar{x}$ = ... Μ: 3

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = α x (2-x) , $\alpha \in R$. .

Α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°. Μ: 10

Β. Για α=1/2, να βρείτε:

α. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της (1, f(1)). Μ: 5

β. τα ακρότατα της συνάρτησης f. Μ: 10

ΘΕΜΑ 3

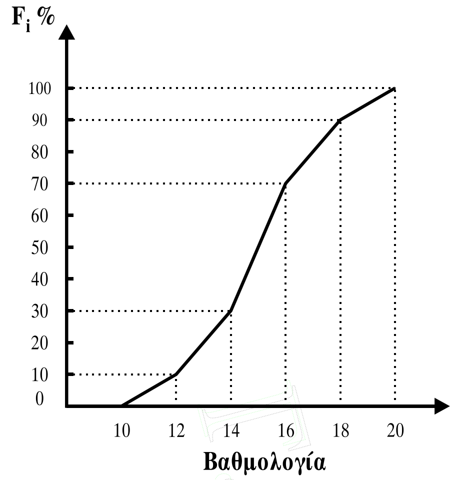
Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50. Μ: 8

β. Να βρείτε τη διάμεσο. Μ: 5

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων. Μ: 7

δ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 50 μαθητών ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16. Μ: 5



ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω={1, 2, 3, 6} δειγματικός χώρος.

Α. Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου k του Ω.

i) P(k)= $\frac{1}{k}$ ii) P(k)= $\frac{1}{2^k}$ iii) P(k)=$\frac{1}{2k}$ Μ: 8

Β. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι οι ακόλουθες: 1, 1, 7, k, k, 3, 3, 3 όπου k είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω, με πιθανότητα P(k) = $\frac{1}{2k}$. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω, όπου

Α={k∈Ω : η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής Χ είναι $M_0 = 3$} και

Β={k∈Ω : η μέση τιμή $\bar{x}$ = 2,5}.

α. Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α και Β. Μ: 8

β. Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B) και P(A∪B). Μ: 9

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = x είναι $f'(x) = 1$. Μ:8

Β. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα; Μ:6

Γ. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων. Μ:6

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

β. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες «μονάδες» με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

γ. Ισχύει $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ όπου f , g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Δύο ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \varnothing$

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών. Μ: 5

ΘΕΜΑ 2

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος Μ:5

β. γυναίκα και όχι φιλόλογος Μ:5

γ. άνδρας και φιλόλογος Μ:7

δ. άνδρας ή φιλόλογος. Μ:8

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. R β. (-1,1) γ. R- {-1,1} δ. $(1, +\infty)$ Μ:5

Β. Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της. Μ:7

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot f(x)\right]$ Μ:6

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)) με τον άξονα x΄x . Μ:7

ΘΕΜΑ 4

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας. Μ:6

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες. Μ:5

γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων; Μ:8

δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα. Μ:6

ΘΕΜΑ 1

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$P(\mathrm{A}') = 1 - P(\mathrm{A})$ Μ:9

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :

α. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(h)}{h}$, h ∈ R , h ≠ 0 και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$, h ∈ R , h ≠ 0

γ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, h ∈ R , h ≠ 0 και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

δ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(h)}{h}$, h ∈ R , h ≠ 0 . Μ:5

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :

α. το εύρος β. η διάμεσος γ. η διακύμανση δ. η τυπική απόκλιση. Μ:5

Δ. Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων. Μ: 6

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. Μ:5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f, όταν x = 3, ισούται με $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ Μ:10

γ. Αν h(x) = $\dfrac{f(x)-\sqrt{3}}{x-2}$ για x ≠ 2, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$. Μ:10

ΘΕΜΑ 3

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30.

Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω Α το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και Β το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αν Α΄, Β΄ είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των Α και Β αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α. P(A) , $P(B)$ Μ:6

β. $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ Μ:6

γ. $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}')$ Μ:6

δ. $P\big((A'\cap \mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}')\big)$ Μ:7

ΘΕΜΑ 4

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.

Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος. Μ:6

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μ:6

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg. Μ:6

δ. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27.

Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος. Μ:7

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x) = c είναι ίση με 0. Μ:8

Β. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Μ:5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ είναι αρνητικός αριθμός.

β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x}-s, \bar{x}+s\right)$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

γ. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i μιας μεταβλητής Χ με το μέγεθος ν του δείγματος προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i. Μ:6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα Α και Β συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη Στήλη Ι αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα Α και Β διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη Στήλη ΙΙ σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Ι και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση πραγματοποιείται Μ:6

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β	$A \cap B$
πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β	$A - B$
πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β	$\left(A \cup B\right)'$
Στη στήλη ΙΙ περισσεύει μία σχέση.	$A \cup B$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. Μ:10

Β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f\left(x\right)$. Μ:15

ΘΕΜΑ 3

Στην "Αττική οδό" εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα ν_i σε χλμ	Σχετική συχνότητα f_i%	Αθροιστική Συχνότητα N_i σε χλμ	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα F_i%
[5-15)		60			
[15-25)					68
[25-35)				180	
[35-45)					
Σύνολο		200			

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών. Μ:10

Β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $\left(x_i,\ f_i\%\right)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων. Μ:5

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$. Μ:5

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων. Μ:5

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2x^3-\dfrac{5}{2}x^2+x+10$

Οι πιθανότητες P(A) και P(B) δύο ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x, στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε ότι P(A) = $1/2$ και P(B) = $1/3$ Μ:9

Β. Για τις παραπάνω τιμές των P(A), P(B) καθώς και για P($A \cup B$) =2/3 , να βρείτε τις πιθανότητες:

i) P($A \cap B$) = ii) P(A-B) = iii) P[$(A \cap B)'$] = iv) P[$(A-B) \cup (B-A)$] Μ:16

ΘΕΜΑ 1

Α. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δ. χ. Ω με $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \le P(B)$. Μ: 7

Β.

α. Πότε ένα πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης;

β. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης. Μ: 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή

α. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = l_2$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = l_1 \cdot l_2$

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in$ Α, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

γ. Ισχύει $\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ με x > 0.

ε. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δ. χώρου Ω ισχύει Ρ(Α΄) = 1 + Ρ (Α).

στ. Το μέτρο διασποράς εύρος ισούται με τη διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

Μ: 12

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x) = $\dfrac{x+2}{e^x}$

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. Μ: 9

β. Να αποδείξετε ότι f (x) + $f'(x)$ = $\dfrac{1}{e^x}$ Μ: 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0, f(0)). Μ: 8

ΘΕΜΑ 3

Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών. Μ: 12

β. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV). Μ: 13

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση f: R → R με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + k\cdot x^2 + 4x + 2$, όπου k ∈ Ω.

Αν $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$, τότε να βρείτε:

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6)$. Μ:8

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β, όπου

Α: «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»

Β: «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός». Μ:8

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ, όπου Γ:«Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R» Μ: 9

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου **Ω** ισχύει:
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ Μ:10

Β. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; Μ:3
β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής; Μ:4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

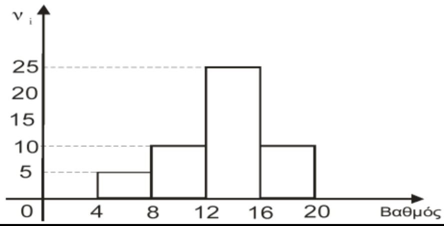
α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Μ:2

β. Ισχύει $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Μ:2

γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης. Μ:2

δ. Αν $A \subseteq B$ τότε P(A) > P(B). Μ:2

ΘΕΜΑ 2



Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων ν_i

α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις βαθμολογίας	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_1	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθρ. Σχετική συχνότητα F_i
[4, 8)					
[8,12)					
[12,16)					
[16,20)					
Σύνολο					

Μ:11

β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών. Μ:8 γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό το πολύ μέχρι και 10; Μ:6

ΘΕΜΑ 3

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου **Ω**, ώστε να ισχύουν:
(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι 7/8
(ii) Οι πιθανότητες P(B) , $P(A\cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X=\left\{k,\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right\}$ όπου $k=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{x^2-6x+5}$

α. Να βρεθεί το k. Μ:5
β. Να βρεθούν τα P(B), $P(A\cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μ:8
γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:
(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. Μ:6
(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α. Μ:6

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,+\infty)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Λ(1, 1). Μ:7
β. Από τυχαίο σημείο Μ(x, y) της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx΄ και yy΄, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Οx, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη. Μ:10
γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή $\bar{x}=5$ και τυπική απόκλιση s_x = 2. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών. Μ:8

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Δίνονται οι συναρτήσεις F(x), f(x) και g(x) με $F(x) = f(x) + g(x)$.
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$. Μ:9
Α.2. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$; Μ:4
Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
α. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς. Μ:2
β. Αν x > 0, τότε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Μ:2
γ. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες f_i και ν_i, χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F_i, N_i. Μ:2
δ. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής. Μ:2
ε. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει Ρ(Α) = Ρ(Β), τότε είναι πάντοτε Ν(Α) = Ν(Β). Μ:2
στ. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της. Μ:2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2 \;\; \mu\varepsilon \; \alpha, \beta \in R$.
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. Μ:3
β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Μ:5
γ. Να βρείτε τα α και β, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο Α(1,1) της γραφικής παράστασης της f να είναι $y = 3x - 2$. Μ:10
δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2}\left(f'(x) \cdot x^3 \right)$. Μ:7

ΘΕΜΑ 3

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16,22) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{x} \pm 3s$, $\bar{x} \pm 2s$, $\bar{x} \pm s$, $\bar{x}$.
α. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 20$ και s = 2. Μ:10
β. Να βρείτε το $\alpha \in \mathrm{N}^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x} - \alpha \cdot s, \bar{x} + \alpha \cdot s)$ ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων. Μ:5
γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9s$. Μ:10

ΘΕΜΑ 4

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του Ω είναι $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{1,3,4\}$, $A - B = \{2,6\}$ και $\Gamma = \left\{ x \in \Omega / \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}$.
α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες Ρ(Α), Ρ(Β), Ρ(Γ). Μ:9
β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Γ. Μ:3
γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ. Μ:3
δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών λ, 3λ, 5λ, όπου λ∈Ω, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Delta = \left\{ \lambda \in \Omega / s^2 > 24 \right\}$. Μ:10

ΘΕΜΑ 1

Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R. και c πραγματική σταθερά.

Να αποδείξετε ότι $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$, $x\in R$. Μ: 10

Β. α. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα; Μ: 3

β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής; Μ: 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o\in A$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_o. Μ: 2

β. Αν το ενδεχόμενο A', συμπληρωματικό του ενδεχομένου Α, πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το Α. Μ: 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2}$. Μ: 2

δ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων. Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών ν_i
0	α+4
1	5α+8
2	4α
3	α-1
4	2α
Σύνολο	50

α. Να υπολογίσετε την τιμή του α. Μ: 3 Στη συνέχεια να βρείτε:

β. Τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές. Μ: 7

γ. Τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές. Μ: 7

δ. Την πιθανότητα ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστο 3 βιβλία. Μ: 8

ΘΕΜΑ 3

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)^2$ κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση.
Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι. Μ: 7

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $1/19$ και ο όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι. Μ: 8

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής; Μ: 10

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10,\ x\ge 0$

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο Α(1, f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι k = 2 και να βρείτε την εξίσωσή της. Μ: 5

β. Μία τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = f(1)$ και τυπική απόκλιση $s = -\dfrac{2f'(4)}{13}$. Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους ν, είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

(i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10, 16). Μ: 10

(ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.
Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου α > 0, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές. Μ: 10

ΘΕΜΑ 1

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$. Μ: 9

Β.1 Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ Μ: 3

Β.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ; Μ: 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Το ενδεχόμενο $P(A \cup B)$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β. Μ: 2

β. Ισχύει: $(συνx)' =$ ημx, για κάθε x $\in$R. Μ: 2

γ. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων. Μ: 2

δ. Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς. Μ: 2

ε. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Τότε ισχύει: $P(\emptyset) \le P(A \cup B) \le P(\Omega)$. Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(\alpha x^2 + \beta x + 9)$ με α,β∈R. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2, e^2)$ είναι $y = -e^2 x + 3e^2$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι α =1 και β = -6. Μ: 12

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f. Μ: 13

ΘΕΜΑ 3

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα. Μ: 15

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
i. «έχει πάρει καταναλωτικό». ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό». Μ: 10

ΘΕΜΑ 4

Οι απουσίες των μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο - Φεβρουάριο - Μάρτιο - Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης	Σχετική συχνότητα fi
[...-...)	…	0,1
[…-7)	…	…
[...-...)	…	0,3
[...-...)	10	…
Σύνολο	//////////////////////	1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της 4ης κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2ης κλάσης f_2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2. Μ: 10

β. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές. Μ: 5

γ. i. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$. Μ: 6

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s Μ: 4

Δίνεται ο τύπος $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right]$

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δ. χ. Ω ισχύει $\mathrm{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}$. Μ: 8

Β. α. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Μ: 4

β. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός. Μ: 3

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i Μ: 2

β. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ Μ: 2

γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_o)=0$ για $x_o\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) *για* $x=x_0$ ελάχιστο. Μ: 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x)=x^\nu$, *όπου ν φυσικός* $\quad$ $f_2(x)=\ln x$, *όπου* $x>0$

$f_3(x)=\sqrt{x}$, *όπου* $x>0$ $\quad$ $f_4(x)=\sigma\upsilon\nu\, x$, *όπου x πραγματικός* Μ: 4

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=xe^x+3$ όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f(x)+e^x-3$ Μ: 10

β. Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-e^x}{x^2-x}$ Μ: 15

ΘΕΜΑ 3

Έστω ο δ. χ. $\Omega=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$ για τον οποίο ισχύει $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2P(3)=2P(4)=2P(5)$

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω: $A=\{1,3,x^2-x-3\}$, $B=\{2,x+1,2x^2+x-2,-2x+1\}$ όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω, δηλαδή οι P(-1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5). Μ: 7

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A\cap B=\{-1,3\}$ Μ: 8

γ. Για $x=-1$ να δειχθεί ότι: $P(A)=5/11$, $P(B)=7/11$, $P(A\cap B)=3/11$ και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ *και* $P(A\cup B')$. Μ: 10

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε δύο δείγματα Α και Β με παρατηρήσεις:

Δείγμα Α: 12, 18, $t_3, t_4, \ldots, t_{25}$, Δείγμα Β: 16, 14, $t_3, t_4, \ldots, t_{25}$. Δίνεται ότι $t_3+t_4+\ \ldots\ +t_{25}=345$.

α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές $\bar{x}_A$ και $\bar{x}_B$ των δύο δειγμάτων Α και Β αντίστοιχα είναι $\bar{x}_A=\bar{x}_B=15$. Μ: 7

β. Αν s_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος Α και s_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος Β, να αποδείξετε $s_A^2-s_B^2=\dfrac{16}{25}$ Μ: 8

γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος Α είναι ίσος με $CV_A=\dfrac{1}{15}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής CV_B του δείγματος Β. Μ: 10

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = x είναι $f'(x) = 1$. Μ: 8

Β. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου Ω. Μ: 4

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων: *i*) $P(\Omega)$ *ii*) $P(\varnothing)$ Μ: 3

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και ότι f_i, i = 1, 2,…,κ, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής. Αν α_i είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε: $\alpha_i = 360 f_i$, για i = 1, 2,…,κ. Μ: 2

β. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$ Μ: 2

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Μ: 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x) = e^x$ όπου x πραγματικός. $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ όπου $x \neq 0$. $f_3(x) = \eta\mu x$ όπου x πραγματικός $f_4(x) = c$ όπου x πραγματικός και c σταθερά. Μ: 4

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x). Μ: 5

β. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ Μ: 8

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση f(x) ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της. Μ: 12

ΘΕΜΑ 3

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$\mathrm{A} = \left\{x \in \Omega / 0 \le \ln(x-1) < \ln 3\right\}$, $B = \left\{x \in \Omega / \left(x^2 - 5x\right)\cdot(x-1) = -6\cdot(x-1)\right\}$,

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $\mathrm{P(A - B)}$ και $\mathrm{P(B \cup A')}$. Μ: 8

β. Αν $\mathrm{P(A)} = \dfrac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathrm{P(A' \cup B')}$. Μ: 7

γ. Αν $\mathrm{P(A)} = \dfrac{1}{4}$ και $\mathrm{P(B - A)} = \dfrac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας P(X), όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $\mathrm{A} \cup X = B$. Μ: 10

ΘΕΜΑ 4

Έστω x_1, x_2, ..., x_{11} ένα δείγμα με παρατηρήσεις: 7, 5, α, 2, 5, β, 8, 6, γ, 5, 3, όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 6$, δ = 6 και R = 8 αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$. Μ: 8

β. Για τις τιμές των α, β, γ, που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $s_x = \sqrt{\dfrac{58}{11}}$ και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μ: 8

γ. Έστω $y_1, y_2, ..., y_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις x_1, x_2, ..., x_{11} επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2.

Αν $\bar{y} = 9$ και $s_y = 2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2. Μ: 9

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$. Μ:8

Β. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$; Μ:7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ο τύπος $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα. Μ:2

β. Η διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές. Μ:2

γ. Αν $x > 0$, τότε $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Μ:2

δ. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu\, x = \eta\mu\, x_0$ Μ:2

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος. Μ:2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$. Μ:7

β. Να αποδείξετε ότι $e^x\, f'(x) = 2 - x$. Μ:9

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$. Μ:9

ΘΕΜΑ 3

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Α	20	26	24	22	18
Β	26	32	19	20	23

α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β. Μ:5

β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας). Μ:5

γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών. Μ:7

δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του. Δίνεται ότι $\sqrt{11} \cong 3{,}3$. Μ:8

ΘΕΜΑ 4

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β; Μ:7

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο Β: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{5} \le P(B) \le \dfrac{7}{10}$ Μ:9

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + P(B)\,x$ όπου x πραγματικός αριθμός και Β το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα. Μ:9

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$. Μ: 9

Β. α. Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής Χ. Μ: 3

β. Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα; Μ: 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10%. Μ 2 β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη. Μ: 2

γ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)^\nu\right) = \ell_1^{\,\nu}$ (ν θετικός ακέραιος). Μ: 2 δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Μ: 2

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [–)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
20 – 40			
40 – 60			
60 – 80			
80 – 100			
Σύνολα			

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι 108^o. α. Να δείξετε ότι $f_1 = f_2 = 1/10,\ f_3 = 5/10,\ f_4 = 3/10$. Μ: 10

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε: i. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του. Μ: 5 ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60. Μ: 5 iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70. Μ: 5

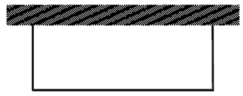
ΘΕΜΑ 3

Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $\mathrm{P(A)}, \mathrm{P(A \cup B)}\ \textit{και}\ \mathrm{P(A \cap B)}$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{p-1,\ p,\ p+1,\ p^2,\ p^3\}$. α. Να δείξετε ότι $\mathrm{P(A)} = p^2, \mathrm{P(A\cup B)} = p\ \textit{και}\ \mathrm{P(A\cap B)} = p^3$ Μ: 9

β. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{P(B)} = p^3 - p^2 + p$. Μ: 8 γ. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{P(B-A)} > \mathrm{P(A-B)}$. Μ: 8

ΘΕΜΑ 4

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.



Σχήμα 1

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο $f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$. Μ: 6 β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m. Μ: 7

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $f'(100),\ f'(101),\ f'(102),\ f'(103)\ \textit{και}\ f'(104)$. Μ: 5

δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών $f'(100),\ f'(101),\ f'(102),\ f'(103)\ \textit{και}\ f'(104)$ και CV' ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c, όπου $c \neq 2$. Να υπολογίσετε το c, έτσι ώστε να ισχύει $CV' = 2CV$. Μ: 7

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει ότι
$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$ Μ: 10

Β. Αν $x_1,x_2,\ldots,x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν ($\kappa\le\nu$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i=1,2,\ldots,\kappa$. Μ: 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι $\left(\mathrm{f(x)}\cdot\mathrm{g(x)}\right)'=f'(x)\cdot g'(x)+f(x)\cdot g(x)$ Μ: 2

β. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει ότι $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}'$ Μ: 2

γ. Για τη συνάρτηση f(x) = ημx ισχύει ότι : $(\eta\mu\, x)'=-\sigma\upsilon\nu\, x$ Μ: 2

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. Μ: 2

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης. Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i, $i=1,2,3,4$ μιας μεταβλητής Χ με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, $i=1,2,3,4$.
Η συχνότητα ν_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2=3$ είναι άγνωστη.
Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x}=4$.

x_i	ν_i
2	6
3	;
5	3
8	4

α. Να αποδείξετε ότι $\nu_2=7$. Μ: 9

β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9. Μ: 9

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής Χ είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι $\sqrt{4{,}9}\approx 2{,}2$ Μ: 7

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+\alpha x-7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει
$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2,\ x\in R$$

α. Να δείξετε ότι α = 9 Μ: 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1}$ Μ: 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$ Μ: 10

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2,\ x>0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Μ: 6

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα. Μ: 6

Β. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f(2), f(4), f(8), f(3) και f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι $R=3\ln\dfrac{1}{4}\ \kappa\alpha\iota\ \delta=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$ Μ: 7

β. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,…,100} ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
$\mathrm{A}=\{\lambda\in\Omega\ /\ R+\delta<-2\}$ Μ: 6

ΘΕΜΑ 1

Α. Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α′ ενός δειγματικού χώρου, ισχύει

$P(\mathrm{A}') = 1 - P(\mathrm{A})$ Μ:9

Β. α. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α.

Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$; Μ:3

β. Αν $t_1, t_2, ..., t_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ σε δείγμα μεγέθους ν,

να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων. Μ:3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_o όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ, δηλαδή αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell$ τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει $\lim\limits_{x \to x_o} \left(f(x) \right)^\nu = \nu \ell^{\nu-1}$ Μ:2

β. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in R$, ισχύει $f'(x) = e^x$ Μ:2

γ. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν. Μ:2

δ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση s και εύρος R, τότε ισχύει $s \approx 6R$ Μ:2

ε. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο. Μ:2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 8$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -7$, να βρεθεί η τιμή του α Μ:5

β. Έστω α=1 i. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2} = \ell$ Μ:10

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ Μ:10

ΘΕΜΑ 3

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν=72 με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ όπου $\nu_4 = 3\nu_3$. Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές $x_1 \;\kappa\alpha\iota\; x_2$ είναι αντίστοιχα 50° και 30°.

α. Να βρεθούν οι συχνότητες ν_i, $i = 1,2,3,4$ Μ:10

β. Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές $x_3 \;\kappa\alpha\iota\; x_4$ Μ:8

γ. Δίνεται ότι $x_1 < -7,\ x_2 = -7,\ x_3 = 3 \;\kappa\alpha\iota\; x_4 > 3$. Να δειχθεί ότι 10 R+72 $\bar{x}$ =52 δ όπου R, $\bar{x}$, δ είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων. Μ:7

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \nu^3 x + \dfrac{4}{x^2}$, $x \in (0,1)$ όπου ν ακέραιος αριθμός με ν >2

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Μ:8

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και να δειχθεί ότι $f(x) \geq 3\nu^2$ για κάθε x ∈ (0,1) Μ:5

Β. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, ..., \nu\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του Α για το οποίο ισχύει $\nu^3 P(A) + \dfrac{4}{\left(P(A)\right)^2} = 3\nu^2$ και $\mathrm{N(A)} = \nu^2 - 9\nu - 8$ όπου P(A) είναι η πιθανότητα του Α και N(A) το πλήθος των στοιχείων του Α α. Να δείξετε ότι $\mathrm{P(A)} = \dfrac{1}{5}$ Μ: 7

β. Αν επιπλέον Β είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $\mathrm{P(A \cap B)} = \dfrac{1}{6}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathrm{A' \cup B}$ Μ:5

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, ..., t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x},\ t_2 - \bar{x}\ ,...,\ t_\nu - \bar{x}$ Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν Μ: 7

Α2. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ. Μ: 4

Α3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου. Μ: 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

β) Για κάθε x>0 ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση x=f(t), τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\upsilon(t_0)=f'(t_0)$

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. Μ: 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1\ ,\quad x \in \mathbb{R}$ Β1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ Μ: 10

Β2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ Μ: 10

Β3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα x΄x Μ: 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4 Μ: 6

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s Μ: 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μ: 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α:«η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά». Μ: 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες P(A), P(B) και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(x - P(A)\right) - \frac{1}{2}\left(x - P(A)\right)^2 + P(B)\ ,\quad x > P(A)$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μ: 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_o = 5/3$ με τιμή $f(x_o) = 0$, να αποδείξετε ότι: $P(A) = 2/3$ και $P(B) = 1/2$ Μ: 2

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A \cup B) = 5/6$ να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α , Β. Μ: 5

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α , Β. Μ: 5

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in R$, να αποδείξετε ότι $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$, $x \in \Delta$ Μ: 9

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; Μ: 3

Α3. Πώς ορίζεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης; Μ: 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Μ:10

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α, τότε η συνάρτηση f/g έχει πάντα πεδίο ορισμού το Α

β) Ισχύει $\lim\limits_{x \to x_o}(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_o$

γ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

δ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.

ε) Αν Ρ(Α) είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α= $\{\alpha_1, \alpha_{2,\ldots,}\ \alpha_\kappa\} \neq \varnothing$, τότε $\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(\alpha_1) + \mathrm{P}(\alpha_2) + \ldots + \mathrm{P}(\alpha_\kappa)$

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

• Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι 144^o
• Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
• 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
• 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα σωστά συμπληρωμένο. Μ:10

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i %
ΣΥΝΟΛΟ				

Β2. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας των μαθητών. Μ: 6

Β3. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14 Μ: 4

Β4. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17 Μ: 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του Α= $\{\omega_1, \omega_3\}$ και Β= $\{\omega_2, \omega_4\}$. Αν είναι $\mathrm{P(A - B)} = \dfrac{\nu+1}{\nu+4}$ και $\mathrm{P(B - A)} = \dfrac{\nu-1}{2\nu}$ όπου ν θετικός ακέραιος, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι Ρ(Α – Β) = Ρ(Α) και Ρ(Β – Α) = Ρ(Β) Μ: 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ν = 4 Μ:10

Γ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β Μ: 4

Γ4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}'$ Μ: 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $t_1, t_{2,\ldots,}\ t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{1}{300s^2}\left(t - \bar{x}\right)^3$, $t \in R \ \kappa\alpha\iota\ s \neq 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Μ: 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για t = $\bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του Μ: 6

Δ3. Αν $f'(0) = 1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μ: 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \ldots, f'(t_\nu)$ είναι ίση με $1/100$ Μ: 6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι: P(A – B) = P(A) – P(A∩B). M: 7

Α2. Πότε δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα; M: 4

Α3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας τιμής x_i ενός δείγματος. M: 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. M: 2

β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6\overline{x}$. M: 2

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ M: 2

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα. M: 2

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%. M: 2

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα.

Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(\mathrm{M}) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(\mathrm{A}) = 4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(\mathrm{K}) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in R$. Αν για το πλήθος N(Ω) των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει

64 < N(Ω) < 72, τότε

Β1. Να δείξετε ότι N(Ω) = 68 M: 6

Β2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ M: 8

Β3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί. M: 6

Β4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη. M: 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων f_i% έχει διαδοχικές κορυφές τις:

Α(8, 0) Β(10, 10) Γ(12, 20) Δ $(14, y_\Delta)$ Ε $(16, y_E)$ Ζ(18, 10) Η(20, 0)

όπου y_E, y_Δ οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

Γ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E, των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα M: 7

Γ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i%. M: 3

Γ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων f_i% της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους. M: 7

Γ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό. M: 4

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα. M: 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}$, $x \in R$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία. M: 8

Δ2. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με Α ⊆ Β και P(A), P(B) είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες P(A∩B), P(A −B), P(A∪B), P(B − A). M: 8

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}$, $x \in R$

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$. M: 3

β) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $\nu_i = 2x_i + 1,\ i = 1,2,3$ οι συχνότητες των τιμών x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων. M: 6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δ. χώρου Ω να αποδειχθεί ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Μ: 7

Α2. Έστω ένας δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.
Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας. Μ: 4

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Α; Μ: 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν x>0, τότε $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. γ) Η αθροιστική συχνότητα N_i μίας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i. δ) Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x} - s, \bar{x} + s\right)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

ε) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση. Μ: 10

ΘΕΜΑ Β

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε ^{o}C) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + \alpha$, όπου $\alpha \in R$ και $t \in [0,24]$ ο χρόνος σε ώρες.

Β1. Να αποδείξετε ότι για $t \in [0,4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4,24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται. Μ: 7

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι 1^{o}C. Μ: 6

Β3. Για α=3 να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0 ^{o}C. Μ: 5

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t \to 4} \dfrac{\theta'(t)}{t^2 - 16}$ Μ: 7

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	ν_i	f_i %	N_i	F_i %	$\nu_i x_i$
[25,)			x			
[,)			x+20			
[,)			2x			
[,)			x^2-6x	50		
ΣΥΝΟΛΟ						

Γ1. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες f% i=1,2,3,4 Μ:6

Γ2. Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι δ=50 χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι c=10. Μ:8

Γ3. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των ηλικιών. Μ: 6

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια; Μ: 5

ΘΕΜΑ Δ

Εξακόσιοι απόφοιτοι Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, οι οποίοι έχουν τα ίδια τυπικά και ουσιαστικά προσόντα, υποβάλλουν αίτηση πρόσληψης σε δύο εταιρείες Α και Β. Δίνεται ότι η πιθανότητα, ένας τυχαία επιλεγμένος από αυτούς: • να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε μια μόνο από τις εταιρείες Α και Β είναι $\dfrac{\lambda+1}{3\lambda}$, λ≠0, • να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη το πολύ σε μια από τις εταιρείες Α και Β είναι $\dfrac{3\lambda-1}{3\lambda}$, λ≠0 • να μην κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε καμία από τις δύο εταιρείες είναι $\dfrac{1}{\lambda-2}$, λ≠2

Δ1. Να αποδείξετε ότι λ=4. Μ:8

Δ2. Από τους 600 αποφοίτους που υπέβαλαν αίτηση πρόσληψης στις εταιρείες Α και Β, η εταιρεία Α έκρινε κατάλληλους για πρόσληψη 50 λιγότερους από όσους έκρινε η εταιρεία Β.

α) Πόσοι απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Α, πόσοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Β και πόσοι απόφοιτοι θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποια από τις δύο εταιρείες στις οποίες κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, επιθυμούν να εργαστούν; Μ: 7

β) Να αποδείξετε ότι 300 απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, από τις εταιρείες Α ή Β. Μ: 6

Δ3. Στους αποφοίτους που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη δίνεται η δυνατότητα παρακολούθησης προγράμματος επιμόρφωσης. Αν η πιθανότητα εύρεσης εργασίας για αυτούς που θα παρακολουθήσουν το πρόγραμμα είναι διπλάσια από την αντίστοιχη εκείνων που δεν θα το παρακολουθήσουν, να υπολογίσετε πόσοι απόφοιτοι από αυτούς, που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, θα βρουν εργασία. Μ:4

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 23 – 05 – 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R, να αποδείξετε ότι $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$, $x \in R$ Μ: 7

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α Μ:4

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$; Μ: 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Μ: 10

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων.

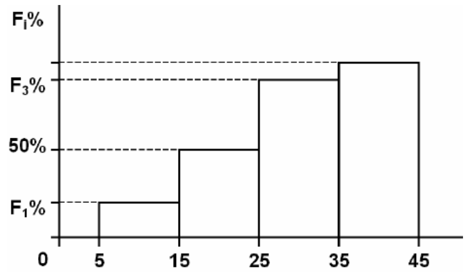
β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του y = f (x) ως προς x , όταν x = x_0.

γ) Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, *τότε* ισχύει ότι $P(A) > P(B)$.

δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς .

ε) $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $x_0 \in R$

ΘΕΜΑ Β



Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

Β1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. Μ: 4 Β2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι α=8 (Μ: 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (Μ: 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)		α+4			
[15,25)		3α-6			
[25,35)		2α+8			
[35,45)		α-2			
Σύνολο					

Β3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές. (Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9{,}17$ Μ: 8 Β4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα. Μ: 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει • Γαλλικά είναι $3\nu / (\nu^2+1)$ • Ισπανικά είναι $\nu+2 / (\nu^2+1)$ • και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$ • μία τουλάχ. από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο. Μ: 7 Γ2. Να αποδείξετε ότι ν = 3 Μ: 6 Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες. Μ: 6 Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης. Μ: 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\ln^2 x}{x}$, x > 0 Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Μ: 5

Δ2. Έστω Μ(x,f (x)), x > 0 σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα y′y τέμνει τον ημιάξονα Οx στο σημείο Κ(x,0) και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα x′x τέμνει τον ημιάξονα Οy στο σημείο Λ(0,f (x)). Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Μ: 7

Δ3. Έστω η ευθεία ε :y = λx + β, β ≠10, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Σ(1,f (1)). Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i) , i=1,2,…,10 της ευθείας ε , τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ =10 και τυπική απόκλιση s_x = 2. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές. Μ: 8

Δ4. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \varnothing$ και $A \cap B \neq \varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$ Μ: 5

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f(x)=c, $x \in R$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι (c)΄=0 Μ:7

Α2. Αν $t_1, t_2, ..., t_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, τότε να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων. Μ:4

Α3. Έστω f μια συνάρτηση με π.ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$; Μ:4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f_i είναι η σχετική συχνότητα της τιμής xi μιας μεταβλητής Χ, τότε ισχύει: $0 \le f_i \le 1$

β) Αν x_i είναι η τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ, τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα Fi εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i γ) Αν τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε ισχύει: $P(A \cup B \cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$ δ) $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$, $x \in R$

ε) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β. Μ:10

ΘΕΜΑ Β

Οι ημέρες αδείας των υπαλλήλων μιας εταιρείας ομαδοποιούνται σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους, σύμφωνα με τον πίνακα: Αν ισχύει ότι: • στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων των ημερών αδείας το τόξο α1 του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση, είναι 72^o, και • $3f_2 = 3f_5 = f_3 = f_4$, τότε:

Αριθμός ημερών (αδείας)	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
[6,...)		16			
[...,...)					
[...,...)					
[...,...)					
[...,26)					
Σύνολο					

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε κατάλληλα. Μ:8

Β2. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας (όχι σε μιλιμετρέ) το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων. Μ:4

Β3. Να βρείτε τον μέσο αριθμό ημερών αδείας και την τυπική απόκλιση του δείγματος. (Δίνεται: $\sqrt{25,6} \cong 5,06$) Μ:8

Β4. Να βρεθεί το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 ημέρες. Μ:5

ΘΕΜΑ Γ

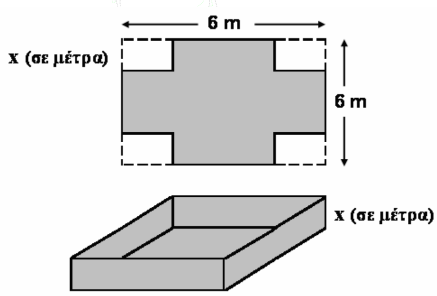
Έστω Ω={ω1,ω2,ω3,ω4,ω5} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και Α={ω1,ω2,ω3}, Β={ω3, ω4, ω5} δύο ενδεχόμενα του Ω, με P(A)= 1/2 . Αν είναι P(ω1)=α, P(ω2)=β, με $26\alpha^2 - 10\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0$, P(ω3)=γ και η συνάρτηση , $g(x) = P(\omega_4)x^3$, $x \in R$ τότε: Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1/5$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma = 1/10$ Μ:9

Γ2. Να βρείτε το P(ω4), αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο (1, g(1)), είναι παράλληλη προς την ευθεία y=x, και στη συνέχεια να βρείτε το P(ω_5) Μ:6

Γ3. Αν είναι $P(\omega_4) = 1/3$, $P(\omega_5) = 1/6$, τότε να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων Κ, Λ, όπου: Κ: «ένα μόνο από τα Α και Β να πραγματοποιείται» Λ: «να πραγματοποιείται το Α ή να μην πραγματοποιείται το Β». Μ:10

ΘΕΜΑ Δ

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, 0<x<3 και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1.. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι $f(x) = 4x(3-x)^2$, $0 < x < 3$ (Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι V=αβγ). Μ:4

Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο. Μ:6

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+2)-8}{x}$ Μ:4

Δ4. Θεωρούμε τις τιμές $y_i = f(x_i)$, i=1,2,3,4,5 με $1 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = 2$, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{y}$ =12, τυπική απόκλιση s_y=2 και συντελεστή μεταβολής CV_y. Να βρείτε το εύρος R των τιμών y_i, i=1,2,3,4,5. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in R$ με –12<α<0 ο οποίος αν προστεθεί σε καθεμιά από τις τιμές y_i, προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής CV τέτοιον, ώστε $CV = 2CV_y + R/12$ Μ:6

Δ5. Έστω Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, αν $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ και $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{P(A)}{P(B)} \le \left(\frac{3-P(B)}{3-P(A)}\right)^2$ Μ: 5

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in R$. Μ: 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in R$; Μ:4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων. Μ: 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων

β) Για τη συνάρτηση $f(x) = 1/x,\ x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x) = 1/x^2$. (Μ: 2)

γ) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Μ: 2)

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (Μ: 2)

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (Μ: 2)

στ) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (Μ: 2) Μ: 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_4\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_3\}$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων {ω1} και {ω3} του Ω ισχύει ότι: $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$

Η P(ω3) είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της f (x) ως προς x , όταν x =1,όπου $f(x) = \frac{x}{3}\ln x$, x>0

Β1. $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ *και* $P(\omega_2) = \frac{1}{3}$. Μ: 10 Β2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$, όπου Α΄ το συμπληρωματικό του Α. Μ: 7

Β3. Αν $P(A') = 3/4$ να βρεθεί τις πιθανότητες P(ω2), P(ω4), $P[(A-B) \cup (B-A)]$και $P(A'-B')$, όπου Β΄ το συπληρωματικό του Β . Μ: 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις. • Δίνεται ότι: η μικρότερη παρατήρηση είναι 50 • η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι x_4= 85 • η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης • η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι δ = 75 και • η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}$ = 74

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι c = 10. Μ: 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά Μ: 8

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
$[\cdot, \cdot)$		
Σύνολο		

Γ3. Δίνεται ότι f_1=0,1 , f_2=0,3, f_3=0,2 , f_4=0,4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$ Μ: 7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με κ<ν, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με • το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74 • το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές. Μ: 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) = xlnx + κ, x > 0, όπου κ ακέραιος με κ > 1 και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1,f(1)) , η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού Ε, με Ε<2 Δ1. Να αποδείξετε ότι κ=2. Μ: 5

Δ2. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y}$ =31 α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}$ = 30 (Μ: 2) β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι: Κάθε μία από τις τετμημένες x1, x2 , ..., x20 αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in R$ με λ > 0. Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (Μ:4) Δ3. Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών f(α), f(β), f(γ), f(e), $f'(\frac{1}{e})$, όπου f(x) = xlnx + 2 Μ: 7 Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{t_n, n=1,2,3, \ldots, 30 : 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \ldots < t_{30} = 1\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα Α={t∈Ω: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (t,f(t)), να σχηματίζει με τον άξονα x′x οξεία γωνία}, Β = {t∈Ω: f(t) > f′(t)+1}, όπου f(t) = t lnt + 2 Να βρεθούν οι πιθανότητες: α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α (Μ: 3) β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β (Μ: 4) Μ: 7

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α′ ισχύει:P(A′) = 1 - P(A) Μ:7
Α2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς εύρος ή κύμανση. Μ:4
Α3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Μ:4
Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Μ:10
α) $\lim\limits_{x\to x_o}(\sigma\upsilon\nu) = \sigma\upsilon\nu(x_o)$ (Μ:2) β) $(c\,f(x))' = c\,f'(x)$ (Μ:2) γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων. (Μ:2) δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Χ χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10% (Μ:2) ε) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B \neq \emptyset$ (Μ:2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x(2x-3),\ x \in R$ Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με P(A) = x1 και $P(B) = -\dfrac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$ όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x1

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μ:6
Β2. Να αποδείξετε ότι P(A) = 1/2 και P(B) = 2/3 Μ:6
Β3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα Μ:5
Και Β4. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{6} \le P(A' - B') \le \dfrac{2}{3}$ Μ:8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν ως προς μία ποσοτική μεταβλητή Χ και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
$[\alpha,\cdot)$				λ
$[\cdot,\cdot)$				3λ+10
$[\cdot,\cdot)$				
$[\cdot,\cdot)$				$\kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10$
Σύνολα				$\kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30$

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F3 και F5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:
$5x^2 - 8x + 3\kappa = 0$ όπου x∈ R και κ ∈ R
Γ1. Να αποδείξετε ότι κ = 1 και λ = 10 Μ:8
Γ2. Να αποδείξετε ότι f1% = 10 , f2% = 30 , f3% = 20 , f4% = 30 και f5% = 10 Μ:5
Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι α = 10 και c = 4 (Μ:4)
Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο. (Μ:4) Μ:8
Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος. Μ:4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1,\ x \in R$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\ \omega_4\}$, όπου $\omega_1 = -1,\ \omega_2 = 0$ και $1 < \omega_3 < \omega_4$. Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_1) = f(\omega_1) - \dfrac{1}{3}$, όπου i = 1, 2 και $P(\omega_3) = -\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}$,

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ του δειγματικού χώρου Ω με Α = {ω∈Ω / f′(ω) ≤ 0 },
Β = {ω∈Ω / f(ω) > 1 } και Γ = ω∈ Ω / $x^2 + \omega x \ge -\dfrac{1}{4}$ για κάθε x∈R
α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3)\ \kappa\alpha\iota\ \ P(\omega_4)$ Μ:8
β) Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ) και P(A-B) Μ:8
Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x x′ γωνία 45^o Μ:4
Δ3. Αν $M_\kappa\left(\omega_\kappa, y_\kappa\right)$, κ = 1, 2, 3, 4 είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): y = x + 1 με $\delta_{\omega_\kappa} = \delta_{y_\kappa}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ R_{y_\kappa} = 5$ τότε να υπολογίσετε τα ω3 και ω4 του δειγματικού χώρου Ω όπου δ_{ω_κ} η διάμεσος των τετμημένων των σημείων M_κ δ_{y_κ} η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων $M_\kappa\ \ \kappa\alpha\iota\ \ R_{y_\kappa}$ το εύρος των τεταγμένων των σημείων M_κ Μ:5