ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
σε μια σελίδα Α4 ανά έτος ….. προσαρμοσμένα στις επιταγές του ΔΝΤ
(IMF: ….4ο μεσοπρόθεσμο ….) (WWF: ….εξοικονόμηση πόρων….)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ Ημερήσιων Λυκείων 2000-2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Επιμέλεια: Γ. Πορταλάκης

ΘΕΜΑ 1

Α. α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός; Μ:2,5

β) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ δεδομένο διάνυσμα και Μ΄(x΄, y΄) η εικόνα του Μ στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$, να βρείτε τα x΄,y΄ συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ και του διανύσματος $\vec{u}$. Μ:5

γ) Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Μ:5

Β1.Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης Ι και δίπλα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού. Μ:3

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
Τ1: «συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x» Τ2: «στροφή κατά γωνία π/2»	1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Β2.Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό Τ με πίνακα Α = Α1Α2 – Α2Α1, όπου Α1, Α2 οι πίνακες των μετασχηματισμών Τ1, Τ2 αντιστοίχως, του ερωτήματος Β1.

α) Να δείξετε ότι ο Τ είναι κανονικός μετασχηματισμός. Μ:4,5

β) Να βρείτε την εικόνα της ευθείας ε: 2x – y + 5 = 0 μέσω του μετασχηματισμού Τ. Μ:5

ΘΕΜΑ 2

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{5+i}{2+3i}$

α) Να γράψετε τον z στη μορφή α + βi, α, β ∈ R. Μ:4

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή. Μ:5

Στις ερωτήσεις (γ), (δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

γ) Αν θ = Arg z, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

Α. $\dfrac{\pi}{4} - \theta$ Β. $\dfrac{\pi}{2} + \theta$ Γ. $\theta - \dfrac{\pi}{2}$ Δ. π + θ Μ:3

δ) Το z^4 είναι ίσο με: Α. 4 Β. 4i Γ. – 4i Δ. – 4 Μ:3

Β. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1$

Μ:10

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha+1)\, e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$

Α. Να βρεθούν τα: $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$. Μ:6

Β. Να βρεθούν τα α, β ∈ R, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$. Μ:10

Γ. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος Β να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Μ: 9

ΘΕΜΑ 4

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου t ≥ 0 . Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\dfrac{8}{t+1} - 2$ α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t). Μ:6

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη; Μ:6

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται ln11 ≅ 2,4). Μ:13

ΘΕΜΑ 1

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (x_0, f(x_0)). Μ: 4

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μ:8,5

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0. Μ:4,5

Β2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0. Μ:8

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτόμενες
α. f(x) = $3x^3$, x_0 =1 β. f(x) = ημ2x, $x_0 = \frac{\pi}{2}$	1. y = – 2x+π 2. y = $\frac{1}{4}$ x+1
γ. f(x)=3$\lvert x\rvert$, x_0 =0 δ. f(x)= $\sqrt{x}$, x_0 =4	3. y = 9x – 6 4. y = – 9x+5 5. δεν υπάρχει

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f(z)= $\frac{2z+i}{\bar{z}-2i}$, $z \in C$ με z ≠ -2i, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών: w_1 =f(9 – 5i) και $w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i)\right]^{2004}$ Μ: 12

β. Θεωρούμε τον πίνακα $M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \lvert w_1\rvert & 0 \\ 0 & -\lvert w_1\rvert \end{bmatrix}$ όπου $\lvert w_1\rvert$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος α.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι: Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα y΄y Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία y = x

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο λ = $\sqrt{2}/3$ Μ:5

γ. Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος β, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει: ΜΧ = Κ όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \pi/2$ Μ:8

ΘΕΜΑ 3

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x_o) > 0$ για κάθε x∈(0, 1).

Αν f(0)=2 και f(1) = 4, να δείξετε ότι:

α. η ευθεία y=3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$. Μ:7

β. υπάρχει $x_1 \in$ (0, 1), τέτοιο ώστε f(x_1)= $\frac{f(1/5)+f(2/5)+f(3/5)+f(4/5)}{4}$ Μ:12

γ. υπάρχει $x_2 \in$ (0, 1), ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(x_2 ,f(x_2)) να είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2x + 2000. Μ:6

ΘΕΜΑ 4

Τη χρονική στιγμή t = 0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \alpha t \big/ 1+\left(t/\beta\right)^2$, t≥0 όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου. α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β. Μ:15

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. Μ:10

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ Μ:5

Α.2. Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να γράψετε τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα: Μ:7,5

Στήλη Α	Στήλη Β	
α. $\dfrac{z_1}{z_2}$	1. $\rho_1 \cdot \rho_2 \left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) - i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)\right]$	4. $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)\right]$
β. $z_1 \cdot z_2$	2. $\rho_1^{\nu}\left(\sigma\upsilon\nu(\nu\theta_1) + i\eta\mu(\nu\theta_1)\right)$	5. $\rho_1 \cdot \rho_2 \left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)\right]$
γ. z_1^{ν}	3. $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)\right]$	6. $\rho_1^{\nu}\left(\sigma\upsilon\nu(\nu\theta_1) - i\eta\mu(\nu\theta_1)\right)$

Β.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z_1 = 2\ (\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} + i\eta\mu\dfrac{2\pi}{3})$ και $z_2 = \sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{3} + i\eta\mu\dfrac{5\pi}{3}$.

Τότε το πηλίκο $\dfrac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με: Α: 2 Β: 2i Γ: – 2 Δ: – 2i Ε: 2 (1 – i) Μ:4,5

Β.2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = 1 + i. Να υπολογίσετε το z^{16}. Μ:8

ΘΕΜΑ 2

Α. Θεωρούμε τον πίνακα Α διάστασης ($\kappa^2 - 2\kappa - 1) \times (\kappa + 2\lambda - 3$) και τον πίνακα Β διάστασης $(\lambda + 1) \times (3\kappa - \kappa^2 + 2)$, όπου κ και λ θετικοί ακέραιοι. α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα κ και λ, για να ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$ Μ:5 β. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ και τις διαστάσεις των πινάκων Α και Β, για να ορίζονται τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ Μ:10

Β. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι: α. $A^2 = -I$, όπου Ι ο μοναδιαίος 2 × 2 πίνακας. Μ:4

β. $2A^{2004} + A^{2001} + A^{1999} = 2I$, όπου Ι ο μοναδιαίος 2 × 2 πίνακας. Μ:6

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 4. Μ:5

β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1, 0) να διέρχεται από το σημείο Α(– 2, 3). Μ:10

γ. Αν α > 2, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x. Μ:10

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε. α. Να αποδείξετε ότι το κόστος Κ(x) σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση:

$K(x) = 10\ (x + \dfrac{16}{x} + 40)$ όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται. Μ:13

β. Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο; Μ:8

γ. Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του β. ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών. Μ:4

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Μ:7,5

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\,\overline{z}$ β. $|z^2| = z^2$ γ. $|z| = -|\overline{z}|$ δ. $|z| = |\overline{z}|$ ε. $|i\,\overline{z}| = |z|$ Μ:5

Β.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της Στήλης Β έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα. Μ:7,5

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert$	α. 4
2. $\lvert z_1^2\rvert$	β. 2
3. $\lvert z_2\rvert^2$	γ. 25
4. $-\lvert\overline{z_1}\rvert$	δ. –5
5. $\lvert i\,z_2\rvert$	ε. –2
	στ. 5
	ζ. 10

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. Μ:5

ΘΕΜΑ 2

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9. Μ:9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)). Μ:7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = 2. Μ:9

ΘΕΜΑ 3

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, ισχύει ότι:

$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε x∈R, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. Μ:10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Μ:8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1). Μ:7

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε x∈ R ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)\,dt$, για κάθε x ∈ R.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε x ∈ R.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2x f^2(x)$ Μ:10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. Μ:4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Μ:4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (x f(x) ημ2x). Μ:7

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής: $G(x)=F(x)+c,\quad c\in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: $G(x)=F(x)+c,\quad c\in R$ Μ:6,5

Α.2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος. α. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=.....$ β. $\int_\alpha^\beta \left(f(x)+g(x)\right)dx=\ .....$ γ. $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]\ dx=.....$

όπου λ, μ ∈R και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] Μ:6

Β.1. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)$ = 6x + 4, x ∈ R και η γραφική της παράσταση στο σημείο της Α(0, 3) έχει κλίση 2. Μ:6,5

Β.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$\alpha.\ \int_0^1\left(e^x+x\right)dx$ Μ:2 $\beta.\ \int_0^4\frac{3x^2}{\sqrt{x}}dx$ Μ:2 $\gamma.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x\right)dx$ Μ:2

ΘΕΜΑ 2

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z+16|=4|z+1|$ Μ:9

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z-1|=|z-i|$ Μ:9

γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β). Μ:7

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+\alpha, & x\le 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right)\cdot\ln(x-1), & x\in(1,2] \end{cases}$ όπου α∈R. .

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}$ Μ:7

β. Να βρείτε το α∈R ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_0 = 1. Μ:11

γ. Για α = – 1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(1, 2) τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x. Μ:7

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο (0,+∞) για την οποία ισχύει: $f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^x\frac{tf(t)}{x^2}dt$ με x > 0

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞). Μ:3

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x},\ x>0$ Μ:7

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Μ:6

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. Μ:4

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1, x = e. Μ:5

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β].

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = G(\beta) - G(\alpha)$ Μ:12

Β.1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)$ = συνx. Μ:8

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μία μέγιστη τιμή. Μ:1

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. Μ:1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ Μ:1

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R , τότε $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$ Μ:1

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Μ:1

ΘΕΜΑ 2

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και f(ν) = i^{ν} z, ν ∈ N*.

α. Να δείξετε ότι f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0 . Μ:7

β. Αν |z| = ρ και Arg(z) = θ, να δείξετε ότι f(13) = ρ $\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$ Μ:8

γ. Αν |z| = 2 και Arg(z) = $\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13). Μ:10

ΘΕΜΑ 3

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1 – 1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1 – 1. Μ:7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μ:18

ΘΕΜΑ 4

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι αν h(x) > g(x) για κάθε x ∈ [α, β], τότε και $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ Μ:2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x)-e^{-f(x)}=x-1$, x ∈ R και f(0) = 0 .

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f. Μ:5

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x\,f'(x)$, για κάθε x > 0. Μ:12

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$. Μ:6

ΘΕΜΑ 1

Α. Αν $z_1=\rho_1\left(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1\right)$ και $z_2=\rho_2\left(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2\right)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι: $\rho_1\cdot\rho_2\left[\sigma\upsilon\nu\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\eta\mu\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$ Μ:15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Μ:2

β. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Μ:2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R. και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α,β], στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Μ:2

δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$. Μ:2

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Μ:2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+2}, x\in R$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} Μ:10

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν. Μ:5

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx$ Μ:10

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο R. , με τύπο $f(x)=\dfrac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}$

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός z = α + βi, α, β ∈ R , με $\alpha\neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Μ:8

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z+1|>|z-1|$. Μ:9

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f. Μ:8

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο R με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f''(x)\cdot f(x)+\left(f'(x)\right)^2=f(x)\cdot f'(x),\ x\in R$ και $f(0)=2f'(0)=1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f. Μ:12

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0, 1], να δείξετε ότι η εξίσωση $2x-\int_0^x\dfrac{g(t)}{1+f^2(t)}dt=1$ έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα [0, 1]. Μ:13

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μ:8

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; Μ:7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$. Μ:2

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f''(x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ. Μ:2

γ. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει: $\int f'(x)dx = f(x) + c,\ \ c \in R$ Μ:2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. Μ:2

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)$ = 0, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 Μ:2

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z = α + βi, όπου α, β∈ R και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι : $\begin{matrix} \mathrm{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4 \\ \mathrm{Im}(w) = 3\beta - \alpha \end{matrix}$ Μ:6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x–2. Μ:9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 2, έχει το ελάχιστο μέτρο. Μ:10

ΘΕΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. Μ:6

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε x ∈ R. Μ:6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}. Μ:5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x = 3. Μ:8

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α, β), δ∈(α, β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ) < 0, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο διάστημα (α, β). Μ:8

β. Υπάρχουν σημεία ξ_1, ξ_2 ∈ (α, β) τέτοια ώστε $f''(\xi_1)$ < 0 και $f''(\xi_2)$ > 0. Μ:9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Μ:8

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$. Μ:10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\left| |z_1| - |z_2| \right| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Μ:2

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . Μ:2

γ. Μία συνάρτηση $f : A \to R$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$. Μ:2

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$. Μ:2

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; Μ:7

ΘΕΜΑ 2

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \ge 0$. Μ:12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x . Μ:13

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Μ:5

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$. Μ:6

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$. Μ:6

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$. Μ:8

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο R με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \ne 0$ για κάθε $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη . Μ:8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα. Μ:8

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o. Μ:9

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)$ = 0. Μ:10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της; Μ:5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους. Μ:2

β. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$. Μ:2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\left(f\cdot g\right)'(x_o)=f'(x_o)\cdot g'(x_o)$$ Μ:2

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)$ > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. Μ:2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα [α, β] . Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β] τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$$ Μ:2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\,ln x$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. Μ:10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. Μ:8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Μ:7

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x\cdot f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f\left(3/2\right)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in\left(0,3/2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$. Μ:8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)dx$, α ∈ R Μ:8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\mathrm{I}\left(\alpha\right)$ Μ:9

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R → R τέτοια ώστε f(1) = 1.

Αν για κάθε x∈R, ισχύει $g\left(x\right)=\int_1^{x^3}\left|z\right|f\left(t\right)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|\left(x-1\right)\geq 0$, όπου z = α + βi ∈ C, με α, β∈ R^*, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g'. Μ:5

β. Να αποδείξετε ότι : $\left|z\right|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$ Μ:8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=-\frac{1}{2}$ Μ:6

δ. Αν επιπλέον f(2) = α > 0, f(3) = β και α > β, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(2,\,3\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=0$ Μ:6

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. Μ:9

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Μ:2

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους. Μ:2

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού R και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες. Μ:2

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Μ:2

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in N$ και $k \geq 2$.

Μ:2

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Μ:6

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: R → R με f(x) = 2x + m x – 4x – 5x, όπου $m \in R$, m > 0.

α. Να βρείτε τον m ώστε f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈ R. Μ:13

β. Αν m = 10, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1. Μ:12

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται μια συνάρτηση f: [α, β] → R συνεχής στο διάστημα [α, β] με f(x) ≠ 0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με Re(z) ≠ 0, Im(z) ≠ 0 και $|\mathrm{Re}(z)| > |\mathrm{Im}(z)|$.

Αν $z + \dfrac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$ Μ:11

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$ Μ:5

γ. η εξίσωση $f^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (–1, 1). Μ:9

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, +∞) → R τέτοια, ώστε $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt)dt$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞). Μ:7

β. Να αποδείξετε ότι f(x) = e^x – (x + 1). Μ:7

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο [0, +∞). Μ:5

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Μ:6

ΘΕΜΑ 1

Α.1 "Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών". Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].
Αν • f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και • $f(\alpha)\neq f(\beta)$ δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in$ (α, β) τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$. Μ:9

Α.2 Πότε η ευθεία y=λ x+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +∞; Μ:4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α) < 0 και υπάρχει ξ ∈ (α, β) ώστε f(ξ) = 0, τότε κατ' ανάγκη f(β) > 0. Μ:2

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ Μ:2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y=x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} Μ:2

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ \kappa\alpha\iota\ f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ Μ:2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει
$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x)-f(\alpha)$ για κάθε x ∈ Δ. Μ:2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x ∈ Δ ή είναι αρνητική για κάθε x ∈ Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. Μ:2

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$

α. Δείξτε ότι: $\overline{z}_1=\dfrac{9}{z_1}$ Μ:7 β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός . Μ:9

γ. Δείξτε ότι $|z_1+z_2+z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$ Μ:9

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x},\ \lambda>0$. α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Μ:3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $f(x)=\lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. Μ:7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda)=\dfrac{e-2}{2\lambda}$ Μ:8

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot \mathrm{E}(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$ Μ:7

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε x ∈ R και $f(0)=0$.

α. Να δειχθεί ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$ Μ:6 β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$ Μ:6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις: $h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt\ \ \kappa\alpha\iota\ \ g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$. Δείξτε ότι h(x) = g(x) για κάθε x ∈ R. Μ:7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt=\dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0 , 1). Μ:6

ΘΕΜΑ 1

Α.1 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ Μ:9

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f : A → R λέγεται "1 – 1"; Μ:4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. Μ:2

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o.
Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_o) και κοίλη στο (x_o, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Μ:2

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους. Μ:2

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f\circ g \ \textit{και} \ g\circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f\circ g\neq g\circ f$ Μ:2

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z,\bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. Μ:2

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda\in R^*$, τότε ισχύει: $\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$. Μ:2

ΘΕΜΑ 2

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1+z_2=4+4i \ \textit{και} \ 2z_1-\bar{z}_2=5+5i$ να βρείτε τους z_1, z_2.
Μ:10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z-1-3i|\leq\sqrt{2} \ \textit{και} \ |w-3-i|\leq\sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w και Μ:10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$. Μ:5

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)\neq 0$ για κάθε x ∈ R.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1 – 1". Μ:7

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2005) και Β(– 2, 1), να λύσετε την εξίσωση

$f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2$ Μ:9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία

$(\varepsilon): y=-\dfrac{1}{668}x+2005$ Μ:9

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R → R, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$ Μ:4

ii. $f'(0)=1$. Μ:4

β. Να βρείτε το λ ∈R έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2+\left(f(x)\right)^2}=3$ Μ:7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο R και $f'(x)>f(x)$ για κάθε x ∈ R, να δείξετε ότι:

i. $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$. Μ:6

ii. $\int_0^1 f(x)dx<f(1)$ Μ:4

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. Μ: 10

Α.2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; Μ: 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$. Μ: 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Μ: 2

γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Μ: 2

δ. Ισχύει ο τύπος $\left(3^x\right)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε x $\in R$. Μ: 2

ε. Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με x ≥ 2.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1. Μ: 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της. Μ: 8

γ.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y = x.

Μ: 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Μ: 7

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. Μ: 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$ Μ: 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν. Μ: 8

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. Μ: 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της. Μ: 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x) = ln x στο σημείο Α(α, ln α) με α > 0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h(x) = e^x στο σημείο Β(β, e^β) με β $\in R$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0. Μ: 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μ: 3

ΘΕΜΑ 1

Α.1 Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu\, x)' = -\eta\mu\, x$, x ∈ R. Μ: 10

Α.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ; Μ: 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2|$. Μ: 2

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_0)g'(x_0)-f'(x_0)g(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$. Μ: 2

γ. Για κάθε x ≠ 0 ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Μ: 2

δ. Μια συνάρτηση f: A → R είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x . Μ: 2

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$ Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, x∈R .

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο R . Μ: 9

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)}dx$. Μ: 9

γ. Για κάθε x < 0 να αποδείξετε ότι: $f(5^x)+f(7^x) < f(6^x)+f(8^x)$. Μ: 7

ΘΕΜΑ 3

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+\alpha$ α∈R .

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x = 2. Μ: 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x = 2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_0 = -3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). Μ: 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x = 3/5$. Μ: 9

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ $\mu\varepsilon$ $x>0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)-\ln x < \frac{1}{x}$, $x>0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,+∞). Μ: 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Μ: 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός α ∈(0,+∞) τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^\alpha = \alpha^{(\alpha+1)}$. Μ: 8

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Μ: 8

Α.2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; Μ: 4

Α.3. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; Μ: 3

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$. Μ: 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Μ: 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_o, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_o. Μ: 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} \mathrm{f(t)\ gt}\right)' = f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα. Μ: 2

ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$ Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$ με $\alpha \in R$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνα ρ = 1. Μ: 9

β. Έστω z_1 , z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 . Μ: 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\left(z_1\right)^{2\nu} = \left(-z_2\right)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν. Μ: 8

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\text{ημ}^2\theta$ όπου $\theta \in R$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \pi/2$, $\kappa \in Z$

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. Μ: 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες. Μ: 8

γ. Αν x_1 , x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $\mathrm{A}\left(x_1, f(x_1)\right)$, $\mathrm{B}\left(x_2, f(x_2)\right)$, $\Gamma\left(x_3, f(x_3)\right)$ βρίσκονται στην $y = -2x - 2\text{ημ}^2\theta$. Μ: 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\text{ημ}^2\theta$ Μ: 7

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ με $f(0) > 0$.

Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις: $F(x) = \int_0^x f(t)\, g(t)\, dt$, $x \in [0, 1]$ και $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$, $x \in [0, 1]$.

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. Μ: 8

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. Μ: 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\dfrac{F(x)}{G(x)} \leq \dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$. Μ: 4

δ. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5}$. Μ: 7

ΘΕΜΑ 1

Α.1 Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μ: 10

Α.2 Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού; Μ: 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα. Μ: 2

β. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$ Μ: 2

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Μ: 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$ Μ: 2

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε $x \in \Delta$. Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sigma\upsilon\nu\, x, & x \geq 0 \end{cases}$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$. Μ: 8

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι α = β = 3. Μ: 9

γ. Αν α = β = 3, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα. $\int_0^{\pi} f(x)dx$ Μ: 8

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x,\ \ x > 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (1, +∞). Μ: 10

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε x > 0. Μ: 7

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)\,dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)\,dt + \int_2^4 f(t)\,dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0, +∞).

Μ:8

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 = α + β i και $z_2 = \dfrac{2 - \overline{z}_1}{2 + \overline{z}_1}$, όπου α, $\beta \in R$ με $\beta \neq 0$.

Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in R$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1$ = 1. Μ: 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο. Μ: 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και α β>0, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι $\left(z_1 + 1 + i\right)^{20} - \left(\overline{z}_1 + 1 - i\right)^{20} = 0$.

Μ:10

ΘΕΜΑ 1

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|, x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει: $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$

Μ:10

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$; Μ: 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to R$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}\left(f(x)\right)=x,\ x\in A$ και $f\left(f^{-1}(y)\right)=y,\ y\in f(A)$ Μ: 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μ: 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0\ \mu\varepsilon\ \ \alpha,\beta,\gamma\in R\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο R των μιγαδικών. Μ: 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Μ: 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$ Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6$ και $\left|w-(1-i)\right|=\left|w-(3-3i)\right|$ τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . Μ: 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . Μ: 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$ Μ: 6 δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ Μ: 6

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0\ \ , & x=0\end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. Μ: 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μ: 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μ: 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$, για κάθε x > 0 . Μ: 7

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει $f(x)=\left(10x^3+3x\right)\int_0^2 f(t)dt-45$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$ Μ: 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.

Να αποδείξετε ότι $g''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$ Μ: 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$ και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$ Μ:10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι $1-1$ Μ: 3

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β].

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$. Μ: 10

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; Μ: 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες. Μ: 2

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Μ: 2

γ. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$. Μ: 2

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$ Μ: 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - \ell \right) = 0$ Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι β = –1 και γ = 1. Μ: 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^{\,3} = -1$. Μ: 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \overline{z}_1|$ Μ: 8

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x,\ x > 0$

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε x > 0. Μ: 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μ: 6

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής. Μ: 6

ii. Αν $k = -\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$. Μ: 7

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, +∞) για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις: $F(x) = \int_0^x f(t)dt,\ x \in [0, +\infty)$, $h(x) = \dfrac{F(x)}{\int_0^x t\, f(t)dt},\ x \in (0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1} \left(f(t) + F(t) \right) dt = F(1)$ Μ: 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, +∞). Μ: 8

γ. Αν h(1) = 2, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 t\, f(t)dt$. Μ: 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt = \dfrac{1}{2} F(1)$. Μ: 5

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. Μ: 10

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Μ: 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ Μ: 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ Μ: 2

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$ Μ: 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του π. ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Μ: 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x)<0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = α, x = β και τον άξονα x΄x είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ Μ: 2

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i$, $\lambda \in R$

Α. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ Μ: 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. Μ: 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2+\overline{w}-12=z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. Μ: 8

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, x > -1 όπου α > 0 και $\alpha \neq 1$

Α. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε x > -1 να αποδείξετε ότι α = e Μ: 8

Β. Για α=e, α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Μ: 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ Μ: 6

γ. Αν $\beta,\gamma \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλ. μια ρίζα στο (1, 2) Μ: 6

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x)=\int_0^x tf(t)dt,\ x\in[0,2]$, $G(x)=\begin{cases}\dfrac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3, & x\in(0,2]\\ 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0\end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2]. Μ: 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2}, 0<x<2$ Μ: 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει H(α)=0. Μ: 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $a\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$. Μ: 7

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0 , +∞) και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ Μ:9

Β. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του π. ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ; Μ:6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\overline{\left(z^{\nu}\right)}=\left(\overline{z}\right)^{\nu}$ Μ: 2

β. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. Μ:2

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και f(x) < 0 κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ Μ:2

δ. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{x/\sigma\upsilon\nu\, x=0\}$ και ισχύει

$f'(x)=-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ Μ:2

ε. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f(x)dx=f(x)+c,\ x\in\Delta$ όπου c είναι μια πραγματική σταθερά. Μ:2

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-8=0$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z=x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μ:10

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μ:8

γ. Για τους αριθμούς που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=40$ Μ:7

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $\ln[(\lambda+1)x^2+x+1]-\ln(x+2),\ x>-1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda\ge -1$

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. Μ:5

Β. Έστω ότι $\lambda=-1$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μ:10

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f Μ:6

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq 0$ Μ:4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες ,

$f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}, 0\le x\le 2$, $f(2)=2f(2), f'(2)=2f(2)+12e^4,\ f(1)=e^2$ όπου k ένας πραγμ. αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},\ 0\le x\le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0,2]. Μ:4

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi\varepsilon^{2\xi}+4f'(\xi)$ Μ:6

γ. Να αποδείξετε ότι k = 6 και ότι ισχύει g(x) = 0 για κάθε $x\in[0,2]$. Μ:6

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x},\ 0\le x\le 2$ Μ:5

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2\dfrac{f(x)}{x^2}dx$ Μ:4

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι: όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}$ Μ:6

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; Μ:4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ; Μ:5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

δ) (συνx)΄=ημx, $x\in\mathbb{R}$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0 Μ:10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{2}{z}=2$ όπου $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης. Μ:7

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$ Μ:6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. Μ:7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότι $3\le|w|\le 7$ Μ:5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. Μ:5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ Μ:7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ. Μ:6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ Μ:7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x)\neq x$

$$f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$, $x\in\mathbb{R}$ Μ:5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή. Μ:7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$ Μ:6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt,\ x\in\mathbb{R}$ *Μ:7*

ΘΕΜΑ Α

Α1.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=ημx, x∈R, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει (ημx)′= συνx. Μ:8

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της; Μ:4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_o \in$ Α (ολικό) μέγιστο, το f(x_o); Μ:3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Μ:10

α) Αν $f(x)=\alpha^x$, α > 0, τότε ισχύει $(\alpha^x)'=x\alpha^{x-1}$

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=0$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και ισχύει f(x) ≥ 0 για κάθε x∈ [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge 0$

ε) Για κάθε z∈C ισχύει $z^2=z\,\overline{z}$

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν $z_1+z_2=-2$ και $z_1\cdot z_2 = 5$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 Μ: 5

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w-z_1|^2+|w-z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2+y^2=4$ Μ: 8

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β2 να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $2\cdot\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Im}(w)=0$ Μ: 6

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος Β2 με την ιδιότητα $|w_1-w_2|=4$, να αποδείξετε ότι $|w_1+w_2|=2$. Μ: 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$, x > 0

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μ: 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, 1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Μ: 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες. Μ: 6

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός ξ∈(x_1, x_2) τέτοιος, ώστε $\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)=0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ(ξ, f(ξ)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Μ: 9

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f: R → R η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R με $f'(0)=1\ \kappa\alpha\iota\ f'(0)=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι f(x) ≥ 1 για κάθε $x\in R$ Μ: 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)dt+x^3}{\eta\mu^3 x}=+\infty$

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x)+2x=2x\cdot(f(x)+x^2),\ x\in R$ τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x^2,\ x\in R$ Μ: 8

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt,\ x\ge 0$

και να λύσετε στο R την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0$ Μ: 7

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$ Μ: 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; Μ: 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon\varphi x)' = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Μ: 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \text{ και } w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z Μ: 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$ Μ: 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$ Μ: 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|w|$ Μ: 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(e^x-x),\quad x\in\mathbb{R}$ Μ: 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μ: 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής. Μ: 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ Μ: 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x)>0$ και $g(x)>0$ ii) $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ iii) $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μ: 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$ Μ: 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(1/x\right)}$ Μ: 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t^2)dt$ τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1. Μ: 7

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = συνx είναι παραγωγίσιμη στο R και x $\forall x \in R$ ισχύει $(\sigma\upsilon\nu\, x)' = -\eta\mu\, x$ Μ:10

Α2. Έστω μία συν. f, ορισμένη σε ένα διάστ. Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης της f στο Δ. Μ: 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z=α+βi, α,β $\in$R ισχύει $z - \overline{z}$ =2β

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in$A (ολικό) μέγιστο το f(x_o), όταν f(x) ≤ f(x_o) για κάθε x $\in$A

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο x_o, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Μ:10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z - i| = 1 + \mathrm{Im}(z)$ (1) και $w\left(\overline{w} + 3i\right) = i\left(3\overline{w} + i\right)$ (2)

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \dfrac{1}{4}x^2$ Μ:7

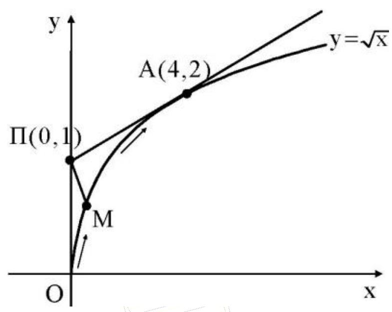
Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0, 3) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.Μ:7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών z, w με z = w. Μ:5

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β να είναι τετράγωνο. Μ: 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, x≥0.



Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0, 1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, t≥0 είναι x΄(t)=16m/min. Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, t≥0 δίνεται από τον τύπο: x(t)=16t Μ:5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4, 2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή. Μ:6 Γ3.Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α. Μ: 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_o \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Μ:8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση f : R→ R, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε: i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε x$\in R$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη x_0=0. Μ: 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R. Μ: 5 Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, x$\in R$ τότε:

Δ3.Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x g(x)}$ Μ: 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$ Μ: 5

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1 είναι $\mathrm{E}(\Omega) = e - \dfrac{5}{2}$ τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ $\in$ (1, 2) τέτοιο, ώστε $\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$ Μ: 6

ΘΕΜΑ Α

Α1) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ Μ: 7

Α2) Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]; Μ: 4

Α3) Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in$ Α τοπικό μέγιστο; Μ: 4

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

γ) Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0 δ) $(\sigma\phi x)'=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, x $\in$ R - {x|ημx≠0}

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] Μ: 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$|z-1|^2+|z+1|^2 = 4$ (1) $\qquad |w-5\overline{w}|=12$ (2)

Β1) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1,. Μ: 6

Β2) Αν $z_1,\ z_2$ είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2|=\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1+z_2|$ Μ: 7

Β3) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του |w|. Μ: 6

Β4) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1\le|z-w|\le 4$ Μ: 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ \ln x-1,\ x>0$

Γ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Μ: 6

Γ2) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, x>0 έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. Μ: 6

Γ3) Αν $x_1,\ x_2$ με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$ Μ: 6

Γ4) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με x>0, τον άξονα xx' και την ευθεία x=e. Μ: 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία για κάθε x > 0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq 0\ ,\qquad \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \ge \frac{x-x^2}{e}\ ,\qquad \ell nx - x = -\left(\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(x)|$$

Δ1) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της. Μ: 10

Αν είναι $f(x)=e^{-x}(ln x-x),\ x>0$, τότε: Δ2) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu\dfrac{1}{f(x)}-f(x)\right]$ Μ: 5

Δ3) Με τη βοήθεια της ανισότητας $lnx\le x-1$, που ισχύει για κάθε x > 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, x>0 όπου α > 0, είναι κυρτή (μ: 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $F(x)+F(3x)>2F(x)$, για κάθε x > 0 (μ: 4). Μ: 6

Δ4) Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β > 0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi_0\in$ (β, 2β) τέτοιο ώστε: $F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$ Μ: 4

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το f(x_0) είναι τοπικό μέγιστο της f Μ:7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; Μ:2

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle. Μ:6

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφ. παράστασης της f.

β)Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσμ. ακτίνων τους.

γ) Αν είναι 0<α<1 τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\alpha)-G(\beta)$ Μ:10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z\neq-1$ για τους οποίους ο αριθμός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι: Β1. |z|=1 Μ:7 Β2. ο αριθμός $\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός. Μ:6

Β3. $\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z Μ:6

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u-ui=\dfrac{i}{w}-w$, w≠0 ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=1$ Μ: 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : R → R, για την οποία ισχύει: $xf(x)+1=e^x$, για κάθε x∈R.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ Μ:6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Μ:6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)). Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση 2f(x)=x+2, x∈R έχει ακριβώς μία λύση. Μ: 8

Γ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0^+}\left[x(\ell nx)\ell n\left(f(x)\right)\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:A\to R$ με Α=(0,+∞) για την οποία ισχύουν σχέσεις: f(A) =(-∞,0] η παράγωγος της f είναι συνεχής στο (0,+ ∞), και $2f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\dfrac{1}{t}\right)dt+2$ για κάθε x >0. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, x>0 Δ1.Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$, x>0 Μ: 8

Δ2.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής Σ(x_0,F(x_0)), x_0>0, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ ∈(x_0,β) με β>x_0, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο Μ(ξ,F(ξ)) να είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: F(\beta)x-(\beta-1)y+2012(\beta-1)=0$ Μ:6

Δ3. Αν β>1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5}{x-1}+\dfrac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1,3) Μ: 5

Δ4.Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x^2} f\left(\dfrac{t}{x}\right)dt\leq\int_1^x tf(t)\,dt$, για κάθε x>0 Μ: 6

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]**.** Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ =G (β) – G(α). **Μ:7**

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού(Θ.Μ.Τ.) **Μ:4**

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της; **Μ:4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_o| = \rho$, ρ > 0 παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο Κ (z_o) και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_o μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) < 0$ <, τότε f (x) < 0 κοντά στο x_o

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in R$ **δ)** Ισχύει ότι: $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. **Μ:10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: (z − 2)($\bar{z}$ − 2) + $|z-2|$ = 2.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ=1 Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$. **Μ:8**

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης w^2 + βw + γ = 0, με w μιγαδικό αριθμό, β,γ $\in R$, και $|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2$ τότε να αποδείξετε ότι: β = − 4 και γ = 5 **Μ:9**

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_o , α_1 , α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση: $V^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$ τότε να αποδείξετε ότι: $|v| < 4$ **Μ:8**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g :R $\to$ R, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- (f (x) + x) (f′ (x) + 1) = x , για κάθε x $\in R$
- f (0) = 1 και
- g (x) = $x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: f (x) = $\sqrt{x^2+1}$ − x , x $\in R$ **Μ:9**

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f (g(x)) = 1 **Μ:8**

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε: $\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt$ = f ($x_0 - \frac{\pi}{4}$) εφx_0 **Μ:8**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f : (0, + ∞) $\to$R μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο (0, + ∞)
- f (1) = 1
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση g (x) = $\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$, x $\in$ (1, + ∞) και α > 1

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. f′ (1) = 0 (Μ:4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 = 1 (Μ:2). **Μ:6**

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (Μ:3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο R $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$ (Μ:6) **Μ:9**

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση (α – 1) $\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$ = (f(α) – 1) (x – α) , x > 1 έχει ακριβώς μια λύση. **Μ:10**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Μ:**7**

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat. Μ:**4**

Α3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f; Μ:**4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη. (Μ: 2)

γ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = +\infty$

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ Μ:**10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν η εξίσωση

$2x^2 - |w-4-3i|\,x = -2|z|, \quad x \in R$ έχει μια διπλή ρίζα, την x = 1

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(4,3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$. **Μ: 8**

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους. **Μ: 5**

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι: $|z-w| \le 10$ και $|z+w| \le 10$ **Μ: 6**

Β4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει: $\left|2z^2 - 3z + 2z\bar{z}\right| = 5$ **Μ: 6**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: ℝ ⟶ ℝ για την οποία ισχύουν: $2xf(x) + x^2\left(f'(x) - 3\right) = -f'(x)$ για κάθε x∈R, f(1) = 1/2

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}, \quad x \in R$ και στη συνέχεια ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R **Μ: 6**

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1. **Μ: 4**

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \le f\left(8(x^2+1)^2\right)$ **Μ: 7**

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(0, 1) τέτοιο, ώστε: $\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi\left(3\xi^2 - 1\right)\cdot f(\xi^3 - \xi)$ **Μ: 8**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f: [0,+∞)⟶ℝ, δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0,+∞), για την οποία ισχύουν: • $f(x) = x + \int_1^x\left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2}{f(t)}dt\right)du$ για κάθε x > 0 , • $f(x)f'(x) \ne 0$ για κάθε x > 0 και f (0) = 0

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις: $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ με x>0 και $h(x) = \left(f'(x)\right)^3$ με x≥0

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)f''(x) + 1 = \left(f'(x)\right)^2$ για κάθε x>0 **Μ: 4**

Δ2. ***α.*** Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f′ στο (0,+∞), (Μ: 4) **β.** Να αποδείξετε ότι f΄(0) = 1, (Μ: 3) **Μ: 7**

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο (0, +∞) , να αποδείξετε ότι:

α. $g(x) \ge 2 - x$ για κάθε x∈(0, +∞) (Μ: 2) **β.** $\int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1$ (Μ: 4) **Μ: 6**

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα x′x και τις ευθείες x = 0 και x = 1 Μ:**8**